

ノイズあり教師によるパーセプトロン学習の解析

本田新*, 岩館健司, 鈴木育男,
(北見工業大学)[†]

池田和司
(奈良先端科学技術大学院大学)[†]

1 はじめに

ニューラルネットワーク(Neural Network : NN)とは、脳の機能を司る神経素子(ニューロン)のモデルであり、高次の情報処理を行うための手法として知られている。NN の一種である単純パーセプトロンによる機械学習はパターン認識やデータマイニングにも応用され、その学習曲線は情報統計力学の枠組みで理論的に解析されている^[1]。単純パーセプトロンにおける教師付き学習において望ましい出力を与える教師機械と学習の対象機械である生徒機械を考えた際、教師機械の出力にガウスノイズが重畳する場合の学習曲線の解析^[2]が行われており、ノイズがない場合と異なり学習曲線がオーバーシュート現象を起こすことが知られている。先行研究では学習曲線を求めるための理論式を数値解析から求め、近似的にオーバーシュート現象の原因を示している。そこで本稿では学習曲線に必要なパラメタを解析的に導出することを目的とする。

2 解析手法

本研究の目的として、パーセプトロンの学習曲線を理論的に求めるために解析を行う。以下、解析に必要な理論について記述する。

2.1 パーセプトロン

パーセプトロンは神経細胞と、神経細胞同士をつなぐ軸索を模擬した NN の代表的なモデルであり、複数の入力と結合荷重の積和の総和を内部状態とし、符号関数で出力を決定する。

2.2 情報統計力学

情報統計力学とは、物理現象を微視的な視点から確率的に考えてその現象を導き出すことが目的の統計力学の手法を使い、高次元で確率的なものを扱う情報の問題を解析していく枠組みである。統計力学の応用として、統計力学の代表的な理論であるスピングラス理論を神経細胞の興奮パターンや NN の入出力など微視的なものに適用し、連想記憶やパーセプトロンの容量など巨視的な性質を導き出すことができる。また機械学習において

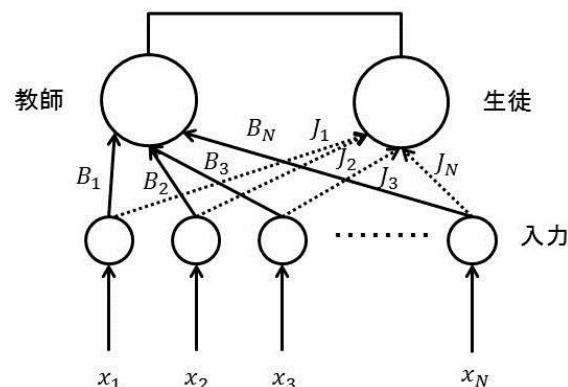


Fig.1 教師と生徒

重要である、未知の入力に対する正しい出力との誤差の平均である汎化誤差を理論的に導き出すことができる。

2.3 問題設定

本研究で対象とするパーセプトロンは入力と出力のみをモデルとする単純パーセプトロンを考える。パーセプトロンがとりうるすべての出力パターンは、そのパーセプトロンと同じ構造を持つパーセプトロンで表現されるため、図 1 に示すように学習するパーセプトロンと同じ入力を持ち、あらかじめ定められた結合荷重を持つパーセプトロンを訓練データの生成に用いる。以下、学習する側のパーセプトロンを「生徒」、訓練データを生成するパーセプトロンを「教師」と呼ぶ。教師と生徒の結合荷重を B, J とする。教師 $B = (B_1, \dots, B_N)$ 、生徒 $J = (J_1, \dots, J_N)$ および入力 $x = (x_1, \dots, x_N)$ は N 次元ベクトルであり、 B の各要素 B_i 、 J の初期値 J^0 の各要素 J_i^0 はそれぞれ独立に正規分布 $N(0,1)$ に従い、入力 x_i は $N(0,1/N)$ に従う。また B は不変であるとする。生徒は結合荷重を変え教師の出力に一致させようとするため、 B, J の一致度 R を学習の度合いとする。 R は式(1)に表される。

$$R = \frac{B \cdot J}{\|B\| \|J\|} \quad (1)$$

巨視的な性質を見るため、 $N \rightarrow \infty$ の状態を考えると、 B, J^0 および x の期待値は

$$\|B\| = \sqrt{N}, \|J^0\| = \sqrt{N}, \|x\| = 1 \quad (2)$$

となる。 $\|J\|$ は時刻により変化するため、初期値 \sqrt{N} に対する比を l^m とすると、 $\|J^m\| = l^m \sqrt{N}$ と表せる。

ここで m は時間ステップである. 教師の出力 y^m は符号関数 $\text{sgn}(B \cdot x^m + n_B^m)$ により生成され, $N(0, \sigma_B^2)$ に従うガウスノイズ n_B が重畳する.

生徒の結合荷重は学習則を f^m として $J^{m+1} = J^m + f^m x^m$ として更新される. ここで, $f^m = \eta y^m \Theta(-y^m J^m \cdot x^m)$ であり, η は学習係数である. また $\Theta(\cdot)$ はヘヴィサイドの階段関数である. この時パラメタを $v^m = B \cdot x^m$, $u^m l^m = J^m \cdot x^m$ とし平均時間 $t = m/N$ とすると, l および R の微分方程式が式(3), (4)に表される.

$$\frac{dl}{dt} = \langle fu \rangle + \frac{\langle f^2 \rangle}{2l} \quad (3)$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\langle fv \rangle - \langle fu \rangle R}{l} - \frac{R}{2l^2} \langle f^2 \rangle \quad (4)$$

ここで $\langle \cdot \rangle$ は中心極限定理から平均 0 分散 1 共分散 R の正規分布に従う (u, v) および n_B に関するサンプル平均である. サンプル平均は以下のように計算される.

$$\langle fv \rangle = \langle \eta \Theta(-u(v + n_B)) \text{sgn}(v + n_B) v \rangle \quad (5)$$

$$= \eta \int_{-n_B}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dn_B P(u, v) P(n_B) v - \eta \int_{-\infty}^{-n_B} dv \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dn_B P(u, v) P(n_B) v \quad (6)$$

$$P(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2}} \exp\left(-\frac{u^2 + v^2 - 2Ruv}{1-R^2}\right) \quad (7)$$

$$P(n_B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_B} \exp\left(-\frac{n_B^2}{2\sigma_B^2}\right) \quad (8)$$

ここで, $P(u, v)$ と $P(n_B)$ は正規分布であり, $\langle fu \rangle$, $\langle f^2 \rangle$ についても同様に計算される^[2].

3 解析結果

3.1 $\langle fv \rangle$ の計算結果

$\langle fv \rangle$ の計算結果を式(9),(10)に示す.

$$\begin{aligned} \langle fv \rangle = & \frac{\eta(1-R^2)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn_B}{\sqrt{2\pi}\sigma_B} \exp\left(-\frac{n_B^2(1+\sigma_B^2)}{2\sigma_B^2}\right) \text{erfc}\left(-\frac{Rn_B}{\sqrt{2(1-R^2)}}\right) \\ & - \frac{\eta R}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn_B}{\sqrt{2\pi}\sigma_B} \exp\left(-\frac{n_B^2}{2\sigma_B^2}\right) \text{erfc}\left(-\frac{n_B}{\sqrt{2(1-R^2)}}\right) \\ & + \frac{\eta R^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn_B}{\sqrt{2\pi}\sigma_B} \exp\left(-\frac{n_B^2(1+\sigma_B^2)}{2\sigma_B^2}\right) \\ & \times \text{erfc}\left(-\frac{Rn_B}{\sqrt{2(1-R^2)}}\right) \quad (9) \end{aligned}$$

ここで, $\text{erf}(\cdot)$, $\text{erfc}(\cdot)$ は誤差関数, 相補誤差関数であり

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt \quad (10)$$

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-t^2) dt \quad (11)$$

と定義される. $\text{erf}(\cdot)$ は奇関数である. 式(9)の第一項から第三項までの計算は部分積分より,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-a^2 x^2) \text{erfc}(bx) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2a} [\text{erf}(ax) \text{erfc}(bx)]_{-\infty}^{\infty} \\ & - \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} dx \text{erf}(ax) \left(\frac{-2b}{\sqrt{\pi}} \exp(-b^2 x^2) \right) \\ & \text{erf}(\infty) = 1, \text{erf}(-\infty) = -1, \text{erfc}(\infty) = 0, \text{erfc}(-\infty) = 2 \text{ であるので} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{a} - \frac{b}{a} \int_{-\infty}^{\infty} dx \text{erf}(ax) \exp(-b^2 x^2) \quad (12) \end{aligned}$$

a, b は定数であり, 式(12)の第二項は奇関数であるため 0 となり, 積分計算結果は $\sqrt{\pi}/a$ と計算でき, 最終的な積分結果は式(13)となる.

$$\langle fv \rangle = \eta \sqrt{\frac{\sigma_B}{2\pi(1+\sigma_B^2)}} - \eta R \sqrt{\frac{\sigma_B}{2\pi}} \quad (13)$$

3.2 比較実験

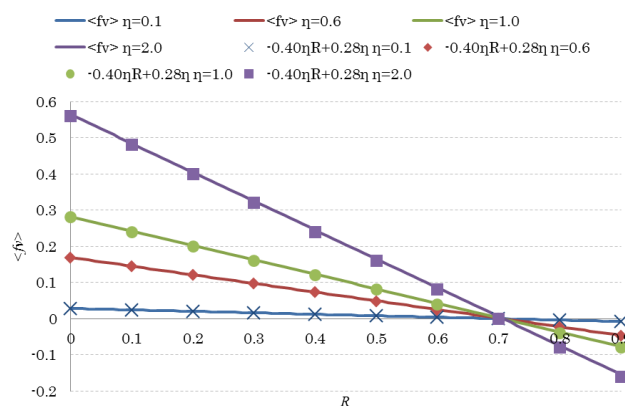


Fig2. サンプル平均と 1 次近似線 ($\sigma_B = 1.0$)

先行研究^[2]により得られた近似直線と本研究により導出した解析結果を図 2 に示す. 解析結果は近似直線と一致した.

4 まとめ

本稿では教師にノイズが重畳するパーセプトロン学習における R と l の微分方程式を解くためのサンプル平均 $\langle fv \rangle$ を解析的に導出した. 今後の展開として $\langle fu \rangle$ と $\langle f^2 \rangle$ を導出し, R と l の微分方程式を解析することが必要である.

参考文献

- [1] 西森秀稔 スピングラス理論と情報統計力学 岩波書店(1999)
- [2] Kazushi Ikeda and Hiroaki Hanzawa and Seiji Miyoshi : Convergence Properties of Perceptron Learning with Noisy Teacher:ISCIDE2012 LNCS7751, pp. 417-424, (2013)